

NOTIZEN

Besetzungsdichten von Quantenniveaus in schnell veränderlichen Plasmen

W. L. BOHN

DVL-Institut für Plasmadynamik, Stuttgart

(Z. Naturforsch. 23 a, 1086—1088 [1968]; eingegangen am 16. Mai 1968)

Die Bedeutung nicht-thermischer Besetzungsdichten von Quantenniveaus für die theoretische und diagnostische Behandlung von Plasmen ist in letzter Zeit immer deutlicher hervorgehoben worden. In den zahlreichen zu diesem Thema verfaßten Arbeiten sind verschiedene Aspekte und Lösungsvarianten diskutiert worden. Allen Arbeiten liegt jedoch ein physikalisches Modell zugrunde, das erstmals von BATES, KINGSTON und McWHIRTER¹ vorgeschlagen wurde. Darin wird angenommen, daß sich alle angeregten Quantenniveaus als Funktion der Plasmamparameter und des Grundzustandes eindeutig beschreiben lassen. Physikalisch wird damit das Einstellen einer instantanen Besetzung der angeregten Niveaus bei dem jeweiligen Wert der Elektronendichte, n_e , und -temperatur, T_e , sowie des Grundzustandes, $n(1)$, gefordert. Diese Einschränkung erlaubt es, die Produktionsraten, $n(j \neq 1)$, aller angeregten Niveaus null zu setzen und ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem auf ein lineares Gleichungssystem zurückzuführen. Diese quasi-stationäre Lösung (quasi steady-state) liegt allen Arbeiten, die sich mit Nichtgleichgewichtsbesetzungen befassen, zugrunde.

Die zeitlich und räumlich stationären Plasmen erfüllen in trivialer Weise die genannten Einschränkungen des Modells. Bei zeitlich und räumlich veränderlichen Plasmen ist die Anwendbarkeit der quasi-stationären Lösung vom Verhältnis der Zeiten abhängig, in denen sich die Plasmamparameter ändern und die die verschiedenen Niveaus benötigen, um sich den Plasmamparametern entsprechend einzustellen. Eine genaue Untersuchung der Relaxationszeiten, $\tau(j)$, zeigt deutlich, daß über weite Bereiche der Plasmamparameter, n_e und T_e , die Relaxationszeiten der angeregten Niveaus um Größenordnungen kleiner sind als die des Grundzustandes. Das liegt daran, daß einerseits der Wirkungsquerschnitt für Stöße aus dem Grundzustand geringer ist als aus den angeregten Niveaus und andererseits keine spontane Emission aus dem Grundzustand möglich ist. Die Unterschiede werden erst durch eine starke Wechselwirkung mit den Elektronen teilweise kompensiert. Die unterbrochenen Kurven der Abb. 1 zeigen in Übereinstimmung mit den Tabellenwerten von McWHIRTER² die Relaxationszeiten (in sec) für die Quantenzahlen $j=1$ und $j=2$ als Funktion der Elektronentemperatur.

Die Berechnungen beziehen sich nur auf die Strahlungs- und Elektronenstoßprozesse eines optisch dünnen Wasserstoffplasmas, wobei für die Elektronen eine Maxwell-Verteilung zugrunde gelegt wird.

In den Experimenten der Plasmaphysik sind jedoch solche Plasmen häufig, in denen mindestens der Resonanzübergang optisch dick ist. Für solche Plasmen müssen die Relaxationszeiten unter weiterer Berücksichtigung der Strahlungsabsorption berechnet werden. In Anlehnung an die Bezeichnungen einer vorangegangenen Arbeit³ ist die Relaxationszeit des Quantenniveaus, j , durch den Ausdruck

$$\tau^{-1}(j) = n_e \left[S(j) + \sum_{i=j+1}^{i=N} X(j, i) + \sum_{i=1}^{i=j-1} X^*(j, i) \right] + \sum_{i=1}^{i=j-1} A(i, j) + \sum_{i=1}^{i=j-1} B(i, j) I(j, i) + \sum_{i=j+1}^{i=N} B(i, j) I(i, j) \quad (1)$$

gegeben. Dabei ist

$$I(i, j) = - \frac{A(j, i)}{B(j, i) - [n(j)/n(i)] B(i, j)} \quad (2)$$

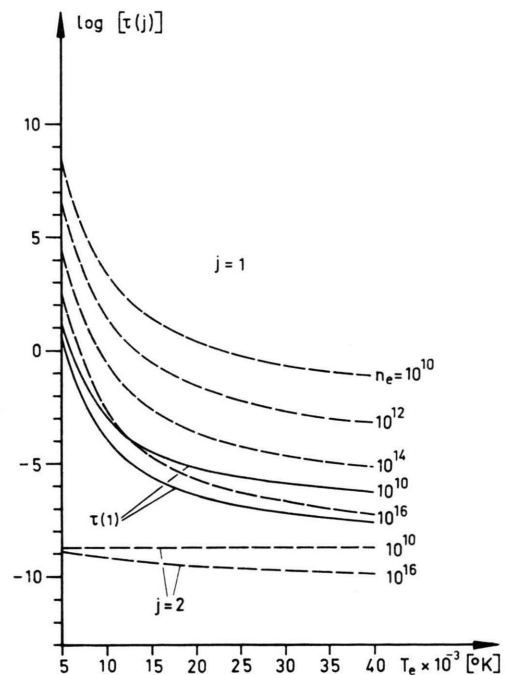


Abb. 1. Relaxationszeiten [sec] in Wasserstoff bei Elektronendichten von $n_e=10^{10}$ bis 10^{16} cm^{-3} .

¹ D. R. BATES, A. E. KINGSTON u. R. W. P. McWHIRTER, Proc. Roy. Soc. London A 267, 297 [1962].

² R. W. P. McWHIRTER u. A. G. HEARN, Proc. Phys. Soc. London 82, 641 [1963].

³ W. L. BOHN, Z. Naturforsch. 22 a, 1593 [1967].



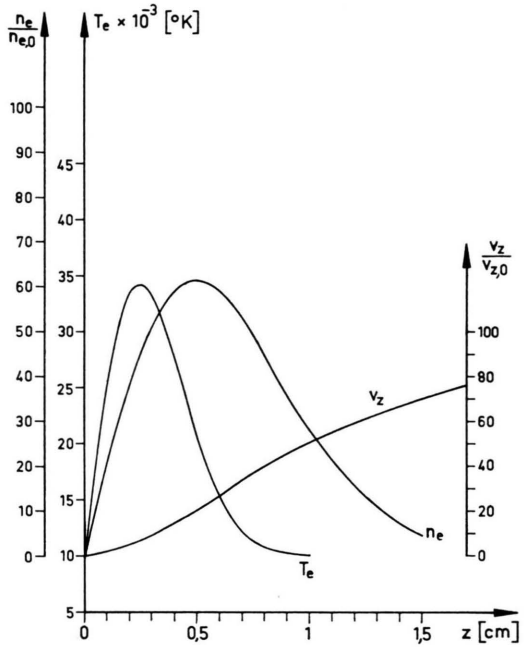


Abb. 2. Vorgegebener eindimensionaler Plasmaparameterverlauf in z -Achsenrichtung (in Anlehnung an Pinch-Experimente und Experimente an Plasmastrahlen).

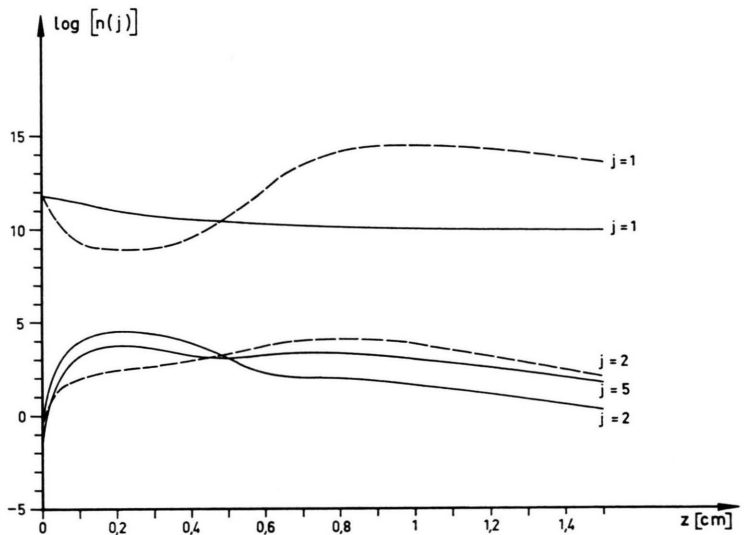


Abb. 4. Besetzungsdichten als Funktion der eindimensionalen Wegstrecke z .

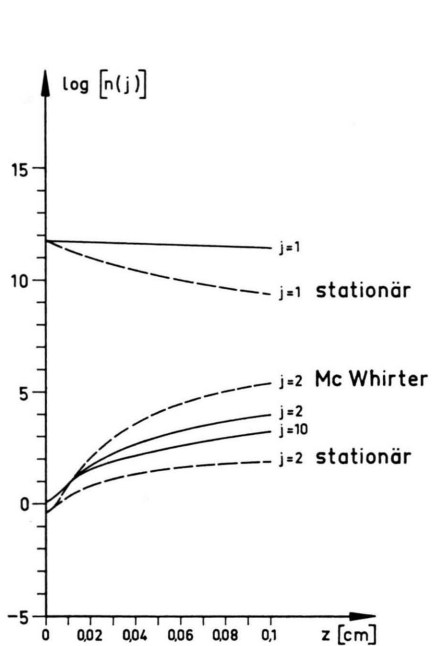


Abb. 3. Berechnete Besetzungsdichten im Vergleich zu anderen Theorien.

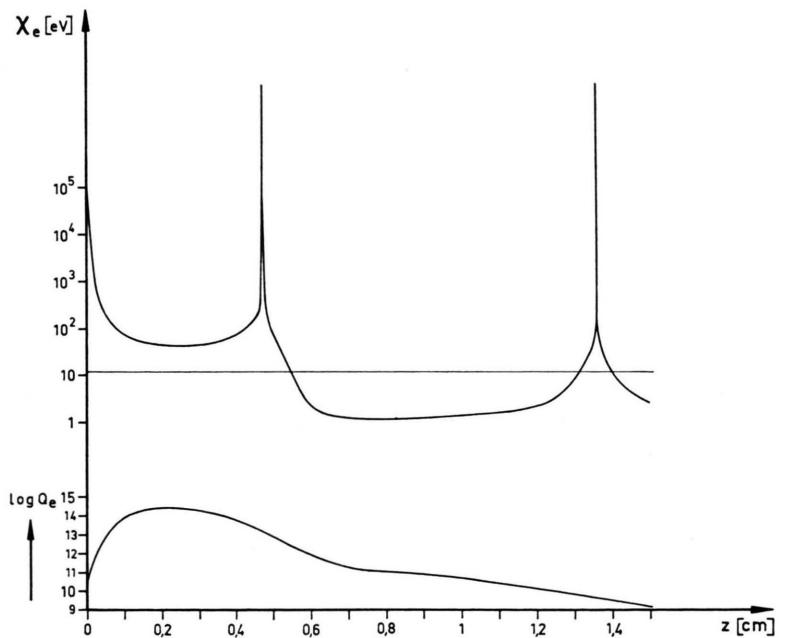


Abb. 5. Energiequellenterm Q_e und pro Prozeß normierter Energieterm χ_e der freien Elektronen als Funktion von z .

das über Frequenz und Raumwinkel integrierte Strahlungsfeld des entsprechenden Übergangs. Die beiden letzten Terme auf der rechten Seite der Gl. (1) beschreiben jeweils die induzierte Emission und die Strahlungsabsorption. Die numerische Auswertung für optisch dicke Plasmen bezüglich des Resonanzübergangs, $1 \rightarrow 2$, erfolgt sofort über die Gln. (1) und (2). Das im Ausdruck für das Strahlungsfeld auftretende Verhältnis, $n(j)/n(i)$, wird aus der Berechnung der Besetzungsdichten im vollkommen stationären Fall³ bei optisch dickem Resonanzübergang [$A(1,2)=0$] gewonnen. In der Gl. (1) darf der Einsteinsche Koeffizient für die spontane Emission, $A(1,2)$, selbstverständlich nicht null gesetzt werden. Die Ergebnisse für den Grundzustand sind in Abb. 1 durch die durchgezogenen Kurven dargestellt. Wie es auf Grund der Häufigkeit der Strahlungsprozesse innerhalb eines optisch dicken Übergangs zu erwarten ist, verkürzt sich die Relaxationszeit, $\tau(1)$, um Größenordnungen im Vergleich zum optisch dünnen Fall. Nur bei hohen Elektronendichten sind die Unterschiede geringer; das fehlende Strahlungsfeld im Bereich des optisch dünnen Übergangs wird durch eine intensive Elektronenstoßwechselwirkung jederzeit kompensiert, so daß das Eintreten von Strahlungsabsorption die Wechselwirkungen nicht mehr grundlegend verändert. Während die Absorption einen ganz entscheidenden Beitrag zur Gl. (1) liefert, tritt die induzierte Emission kaum in Konkurrenz zur spontanen Emission. Die Relaxationszeiten des 1. angeregten Niveaus bleiben deshalb praktisch unverändert und sind in Abb. 1 graphisch nicht von den Kurven des optisch dünnen Falls zu unterscheiden. Erst bei merklicher Absorption in weiteren Übergängen würden Unterschiede auftreten. Eine starke Resonanzstrahlung verschiebt die Gültigkeitsgrenze zwischen der quasi-stationären und der vollkommen stationären Lösung zugunsten der letzteren.

Nach den Untersuchungen der Relaxationszeiten wollen wir uns solchen Plasmen zuwenden, deren zeitliche und räumliche Variationen vergleichbar oder groß gegenüber allen Relaxationszeiten, $\tau(j)$, sind und die nicht mehr durch das quasi-stationäre Modell erfaßt werden. Das die Besetzungsdichten der Quantenniveaus beschreibende System von Differentialgleichungen läßt sich in Vektorschreibweise in einen Ausdruck zusammenfassen:

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{n}\mathbf{v}) = \dot{\mathbf{n}} = P\mathbf{n} - \mathbf{R}, \quad (3)$$

wobei \mathbf{n} die Besetzungsdichten, $\dot{\mathbf{n}}$ die Produktionsraten, P und \mathbf{R} jeweils die Koeffizientenmatrix und die Rekombinationsterme, wie sie im einzelnen in Anm.³ erläutert sind, beschreiben. Als numerisches Beispiel wird ein zeitlich stationäres, in z -Achsenrichtung strömendes, schnell „aufgeheiztes“ und nachfolgend beschleunigtes Plasma betrachtet. Der eindimensionale Verlauf von T_e , n_e und der Geschwindigkeit v_z ist wie

in Abb. 2 vorgegeben ($n_{e,0}=10^{10} \text{ cm}^{-3}$; $v_{z,0}=10^4 \text{ cm/sec}$). Als Randbedingung des Systems (3) wird die stationäre Lösung

$$P\mathbf{n} - \mathbf{R} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{n} = P^{-1}\mathbf{R} \quad (4)$$

am Koordinatenpunkt, $z=0$, gewählt. Das entspricht einer leichten Vorionisierung des Plasmas. Die Berechnungen sind für die 10 ersten Quantenniveaus eines optisch dünnen Plasmas mit den bekannten Wirkungsquerschnitten^{1,4} durchgeführt und in den Abb. 3 und 4 aufgetragen worden. Für die ersten 0,1 cm ist in Abb. 3 ein Vergleich zur stationären Lösung, nach Gl. (4), und zur quasi-stationären Lösung nach McWHIRTER vorgenommen. Es ist unter anderem deutlich zu erkennen, daß die allgemeine Lösung für $j=2$ nur mit erheblicher Verzögerung der quasi-stationären Lösung bzw. der Plasmaänderung folgen kann. In Abb. 4 ist der gesamte Verlauf der Besetzungsdichten im Vergleich zur stationären Lösung (unterbrochene Kurven) dargestellt. Während die Besetzungen der angeregten Niveaus in der Ionisationsphase stark ansteigen, sinkt die des Grundzustandes nach entsprechender Verzögerung um zwei Größenordnungen. Die auf den Zustand $j=1$ bezogene Rekombination wird erst außerhalb der Darstellung maßgebend. Von einem im Zusammenhang mit schnell strömenden Plasmen oft erwähnten „Einfrieren“ des Grundzustandes im thermodynamischen Sinn kann hier keine Rede sein.

Die Energie, die die freien Elektronen einerseits zur Ionisation und Anregung der Atome und andererseits zur Bestreitung der ständigen Strahlungsverluste aufbringen müssen, ist im Energiequellenstrom, Q_e [eV], in Abb. 5 zusammengefaßt. Besonders interessant ist es, die Energie zu berechnen, die im Mittel pro Ionisation bzw. Rekombination erforderlich ist. Sie wird durch $\chi_e = Q_e / \sum_j \dot{n}(j)$ festgelegt und ist im oberen Teil der

Abb. 5 aufgetragen. Die Singularitäten treten an den Stellen auf, an denen die Summe aller Produktionsraten durch null läuft. An diesen Stellen ist χ_e physikalisch nicht mehr definiert. Während der Aufheizung des Plasmas liegt χ_e weit über der eigentlichen Ionisationsenergie, die als Referenzlinie in Abb. 5 eingezeichnet ist. Mit diesem Ergebnis zeigt die Berücksichtigung der angeregten Quantenniveaus eine drastische Abweichung von den sonst bei strömenden Plasmen üblichen Überlegungen, in denen pro Ionisation im wesentlichen die Ionisationsenergie angesetzt wird. Im weiteren z -Verlauf kann der Strahlungsverlust des Plasmas durch die teilweise einsetzende Rekombination in höhere Niveaus praktisch kompensiert werden.

Der hier angedeutete entscheidende Einfluß des Strahlungsfeldes und der Besetzungsdichten angeregter Quantenniveaus auf die schnelle Aufheizung und Expansion eines Plasmas wird in einer folgenden Arbeit eingehender behandelt.

⁴ H. W. DRAWIN, Report EUR-CEA-FC-383, Fontenay aux Roses [1966].

Frau Dipl.-Math. H. KOEPE dankte ich für ständige Hilfe bei den umfangreichen numerischen Aufgaben.